



HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIEDELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen		Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme Matematiikan aineenopettaja	
Tekijä – Författare – Author Tommi Mäkeläinen			
Työn nimi – Arbetets titel – Title Kultainen leikkaus			
Työn laji – Arbetets art – Level Pro gradu -tutkielma		Aika – Datum – Month and year Helmikuu 2018	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages 35
Tiivistelmä – Referat – Abstract <p>Esittelen työssä kultaisen leikkauksen ominaisuuksia ja esiintymistä matematiikan eri aihepiireissä. Määrittelen analyyttisesti kultaiselle leikkaukselle eri esitysmuotoja polynomiyhtälön ratkaisuna ja äärettömänä ketjumurtolukuna, joiden pohjalta esittelen kultaisen leikkauksen perusominaisuuksia. Käsittelen Fibonaccin lukuja sekä niiden yhteyttä kultaiseen leikkaukseen, joista tärkeimpänä tuloksena saadaan Binet'n kaava. Geometrian saralla perehdytään kultaisen leikkauksen mukaisiin konstruktioihin ja monikulmioihin, joista päästään epäsäännölliseen Penrosen laatoitukseen. Laatoituksen deflaatiota tutkimalla löydetään etsityksi raja-arvoksi kultainen leikkaus. Lopuksi kerron kultaisen leikkauksen yhteydestä luontoon ja tarjoan ilmiölle erään selityksen optimointi-sovellusongelman kautta.</p>			
Avainsanat – Nyckelord – Keywords Kultainen leikkaus, Fibonaccin lukujono, Penrosen laatoitus			
Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited Kumpulan tiedekirjasto			
Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information			

Kultainen leikkaus

Tommi Mäkeläinen

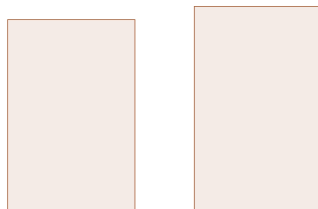
Sisältö

1	Johdanto	2
2	Kultainen leikkaus analyyttisesti	4
2.1	Janojen suhteenä	4
2.2	Jonojen avulla	5
2.3	Luvun irrationaalisuudesta	8
2.4	Kultaisen leikkauksen perusominaisuuksia	8
3	Fibonaccin lukujono	10
3.1	Porrasesimerkki	10
3.2	Binet'n kaava	12
3.3	Fibonaccimatriisit	14
3.4	Yleistetty Fibonacci lukujono	16
4	Kultainen leikkaus geometriassa	19
4.1	Kultaisen leikkauksen konstruktio ja kultaiset monikulmiot	20
4.2	Kultaiset suorakulmiot ja Fibonaccin spiraali	23
4.3	Penrosen laatoitus	24
4.3.1	Leijojen ja nuolten deflaatio	26
5	Kultainen leikkaus luonnon optimointistrategiassa	29
5.1	Janan jako -ongelma	30
5.2	Lehtien sijoitus -optimointi	31
6	Lopuksi	33

Luku 1

Johdanto

Ihmisillä on mieltymys suosia tietynlaisia muotoja yli muiden vaihtoehtojen. Tämän olen huomannut opetustilanteissa, joissa henkilö on piirtämässä esimerkiksi kolmiota taululle. Usein kolmiosta tulee tasakylkisen tai suorakulmaisen kolmion approksimaatio; vielä useammin kolmio piirretään kärki ylöspäin. Kuitenkaan mitään rajoitteita kolmion muodelle ei ollut annettu.



Kuva 1.1: Kumpi suorakulmio on näyttää paremmalta?

Kun katsot kuvassa 1.1 olevia suorakulmioita, kumpi niistä on mielestäsi visuaalisesti miellyttävämpi? Odotettavissa on, että oikeanpuoleinen suorakulmio tulisi valituksi useammin, mutta mistä tämä suotuisuus johtuu? Oikeanpuoleisessa suorakulmiossa pidemmän sivun suhde lyhyempään sivuun on ns. kultainen leikkaus (engl. *golden ratio*). Tämän luvun likiarvo on 1,618 ja sen nimeksi sopisi myös kultainen luku, mutta tätä nimitystä käytetään jo erityisestä kalenteripäivästä. Sana leikkaus tulee geometrisista konstruktioista, joissa janojen leikatessa sopivasti löydetään kuviosta ko. kultainen suhde. Vasemmanpuoleisessa suorakulmiossa sivujen suhde on puolestaan 3 : 2.

Kun edellä esittelin ihmisen taipumuksista suosia tietynlaisia monikulmioita, tarkoitin sillä juuri kultaista leikkausta noudattavia muotoja. Jo antiikin Parthenon-temppelin pituuksista, aivan kuten renessanssin taidemaalauksista, löytyy tämä erityinen suhde. Esimerkiksi Da Vincin kuuluisaan *Mona Lisaan* on mahdollista sommitella kultainen kolmio, jossa sivujen suhteena on kultainen leikkaus. Tämä suhde on kautta historian ollut ihmiselle poikkeuksellisen tärkeä ja esiintyy paljon arkkitehtuurissa ja taiteessa. Luvun esiintyminen ei kuitenkaan rajoitu ihmisen suosimaan valintaan, sillä luku, tai tarkemmin sen likiarvo, näkyy myös luonnossa mm. auringonkukan mykeröspiraalien suhteissa. Lukija voi halutessaan laskea oman pituutensa navan korkeudensa suhteen, ja tuloksen pitäisi olla lähellä kultaista leikkausta. Vaikka luvun monialainen esiintyneisyys vaikuttaa kovin mystiseltä, tutkielman loppupuolella tulen näyttämään, että luku on oikeastaan hyödyllinen kasveille sijoitusongelman optimoinnissa.

Tässä tutkielmassani perehdytän kultaisen leikkauksen esiintymiseen matematiikan eri aihepiireissä ja esitän siihen liittyviä tuloksia. Kultainen leikkaus liittyy olennaisesti Fibonaccin lukuihin, joilla on monipuoliset rekursio-ominaisuudet, ja ne osoittautuvat myös monien soveltavien ongelmien ratkaisuiksi. Kultainen leikkaus on myös vahvasti esillä geometriassa, josta tulen esittämään keskeisiä kultaiseen leikkaukseen liittyviä konstruktioita sekä kultaisia monikulmioita. Kultaisten kolmioiden ja gnomonien pohjalta tarkastelen vielä epäsäännöllistä Penrosen laatoitusta sekä sen ominaisuuksia ja geometrysten kuvioiden deflaatioita. Aloitan tutkielmani kuitenkin kultaisen leikkauksen perusteista, joten on syytä esittää kultaisen leikkauksen matemaattinen määritelmä, ja tarkastella luvun perusominaisuuksia.

Luku 2

Kultainen leikkaus analyyttisesti

Kun kultaiselle leikkaukselle halutaan tarkka matemaattinen määritelmä, likiarvo 1,618 ei riitä. Tarvitsemme jonkin paremman määritelmän, jolla kultaiselle leikkaukselle saadaan tarkka arvo. Seuraavassa kappaleessa esitän, miten kultainen leikkaus ratkaistaan janojen avulla, josta päästään varsinaiseen määritelmään. Tämän jälkeen esitän leikkaukselle vaihtoehtoisen esitysmuodon päättymättömän ketjumurtoluvun avulla, ja lopuksi kokoan peruslauseita kultaisesta leikkauksesta.

2.1 Janojen suhteena

Minulle kultainen leikkaus tuli vastaan ensimmäistä kertaa jo peruskoulun matematiikan tehtävässä, jossa se määriteltiin janojen avulla seuraavasti:

Olkoon a ja b janat, kuten kuvassa 2.1, joista jana a on pitempi. Janat a ja b ovat kultaisessa suhteessa, jos lukujen $a + b$ suhde lukuun a on yhtä paljon kuin luvun a suhde lukuun b . Toisinsanoen, jos a on b :tä suurempi, niin a :n ja b :n suhde on kultainen leikkaus,



Kuva 2.1: Janat a ja b kultaisessa suhteessa.

jos ja vain jos

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Ratkaistaan yhtälöstä a ilmoittamalla se b :n avulla. Saadaan

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a} &= \frac{a}{b} \\ ab + b^2 &= a^2 \\ a^2 - ab - b^2 &= 0, \quad \text{josta toisen asteen ratkaisukaavalla} \\ a &= \frac{-(-b) \pm \sqrt{(-b)^2 - 4(-b^2)}}{2} \\ a &= \frac{b \pm \sqrt{5b^2}}{2} \\ a &= b\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).\end{aligned}$$

Nyt pituuksien a ja b suhde on $a/b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ja kultaisen suhteen toteuttaa siten kaksi arvoa, joista toinen on negatiivinen. Näistä tuloksista kultaiselle leikkaukselle on valittu positiivinen arvo, mikä on järkevää sallittaessa janojen pituuksille vain positiivisia arvoja. Negatiivinen ratkaisu liittyy kuitenkin kultaisen leikkauksen käänteislukuun, kuten pian huomaamme.

Kultaiselle leikkaukselle on useita vakiintuneita merkintöjä, joista suosituimpia ovat kreikkalaiset kirjaimet ϕ , τ ja α . Käytän tässä tutkielmassani kultaiselle leikkaukselle kirjainta α ; vastavuoroisesti negatiiviselle ratkaisulle kirjainta β . Positiivinen ja negatiivinen ratkaisu poikkeavat toisistaan vain osoittajan termin $\sqrt{5}$ etumerkin osalta, jolloin luvuilla α ja β on erityisiä riippuvuuksia, joita tarkastelen tämän luvun lopussa.

Kultaisen leikkauksen irrationaalisuus seuraa helposti: yksinkertaisella matemaattisella analyysillä voimme todeta, että luvun $\sqrt{5}$ ollessa tunnetusti irrationaalinen, myös luku $1 + \sqrt{5}$, ja edelleen $(1 + \sqrt{5})/2$, on irrationaalinen.

2.2 Jonojen avulla

Edellä esittelin kultaisen leikkauksen tarkan arvon johtamisen janojen avulla. Sen voi johtaa myös muilla tavoilla, ja näytänkin seuraavaksi miten tulokseen päädytään jonosta. Tarkastellaan tätä varten rekursiivista jonoa

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}, \quad \text{missä } a_0 = 0.$$

Jonon ensimmäiset jäsenet ovat $a_0 = 0, a_1 = \sqrt{1}, a_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}, a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$.

Merkitään jonon raja-arvoa kirjaimella x , toisin sanoen $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$.

Nyt yhtälöstä voidaan ratkaista x neliöimällä puolittain ja sijoittamalla $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}} = x$ yhtälön oikealle puolelle.

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}$$

$$x^2 = 1 + x$$

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

jolloin päädyimme jälleen samanlaiseen polynomi yhtälöön, jonka ratkaisuna on kultainen leikkaus α . Tämä on myös ainut ratkaisu, sillä β on negatiivinen, mutta summa positiivisista ykkösistä ja niiden neliöjuurista on aina positiivinen. Löysimme kultaiselle leikkaukselle nyt myös esitysmuodon

$$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}.$$

Palataan vielä takaisin polynomi yhtälöön $a^2 = a + 1$ ja muokataan sitä toistuvilla sijoituksilla seuraavasti:

$$a^2 = a + 1 \quad | :a \ (\neq 0)$$

$$a = 1 + \frac{1}{a} \quad \text{Sijoitetaan oikealle puolelle } a = 1 + \frac{1}{a}$$

$$a = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}$$

$$a = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}}$$

$$a = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}.$$

Selvästi sijoituksia voidaan tehdä loputtomasti ja osoittautuu, että luku tarkentuu, mitä pidemmälle sijoituksia suoritetaan. Edellä oleva luvun esitysmuoto on nimeltään ketjumurtoluku, joka määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.1. Äärellinen ketjumurtoluku on muotoa

$$\lambda_0 + \frac{1}{\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\lambda_n}}}},$$

jota merkitään lyhyemmin $\{\lambda_0; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Ääretön ketjumurtoluku on muotoa

$$\lambda_0 + \frac{1}{\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_3 + \dots}}},$$

jota merkitään lyhyemmin $\{\lambda_0; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$. Molemmissa ketjumurtoluvuissa λ_0 on kokonaisluku, ja λ_n on positiivinen kokonaisluku kaikilla $n > 0$.

Puolipisteen jälkeinen osa on ketjumurtoluvun jakso, joka äärellisellä ketjumurtoluvulla on selvästi äärellinen. Jakso voi kuitenkin olla äärellinen myös äärettömällä ketjumurtoluvulla, ja jakson merkiksi on tavallista piirtää viiva jakson muodostavien lukujen yläpuolelle. Esimerkiksi kultainen leikkaus on ääretön ketjumurtoluku, kuten edellä huomasiimme, ja sen jaksona on yksi luku, joka on 1. Kultaisen leikkauksen ketjumurtoluku on siis $\{1, \bar{1}\}$. Mikäli ketjumurtoluku on päättävä, se voidaan sieventää rationaaliluvuksi, mikä implikoi että ääretön ketjumurtoluku on irrationaalinen; erityisesti siis α on irrationaalinen. Sen likiarvoa voidaan kuitenkin approksimoida valitun pituisella ketjumurtolukuesityksellä. Nämä ovat nimeltään *konvergentteja*, ja yleisesti määritellään, että irrationaaliluvun a n :s konvergentti on ketjumurtolukuesitys $\{\lambda_0; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Esimerkiksi kultaisen leikkauksen kuusi ensimmäistä konvergenttia ovat $1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8$.

Pohditaan seuraavaksi millainen jono toteuttaisi sekä geometrisyyden ja erityisen summarekursioon. Olkoon jono a_n sellainen, että se on geometrinen ts. $a_{n+1} = ca_n$ kaikilla n , missä $c \in R$ ja se toteuttaa lisäksi rekursioyhtälön $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Nyt siis $a_{n+2} = ca_{n+1} = c^2a_n$, jolloin sijoituksella rekursioyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} c^2a_n &= ca_n + a_n, & | :a_n (\neq 0 \text{ oletuksella}) \\ c^2 &= c + 1 \\ c^2 - c - 1 &= 0, \end{aligned}$$

jonka ratkaisu on α tai β . Mikäli siis jono on geometrinen ja sen jokainen jäsen on kahden edellisen jäsenen summa, niin tällöin jonon seuraava jäsen saadaan kertomalla se joko kultaisella leikkauksella tai sen käänteisluvulla.

Kuten edellä olevissa esimerkeissä huomasimme, kultainen leikkaus esiintyy monien eri lukujonojen ratkaisuna ja sillä on monta eri esitysmuotoa. Yhteistä edellä esitetyille ongelmille oli ratkaisua johdettaessa päätyä polynomiyhtälöön $x^2 - x - 1 = 0$, josta α ja β ovat ratkaisuehdokkaat.

2.3 Luvun irrationaalisuudesta

Luvussa 2.1 totesimme kultaisen leikkauksen olevan irrationaalinen. Nyt käsittelen sitä, kuinka irrationaalinen luku voi ylipäättään olla, ja miten tämä määritellään. Tarkastellaan ensin jotain muuta irrationaalilukua, esimerkiksi piitä π . Piin likiarvoa voidaan approksimoida rationaaliluvulla p_n/q_n , missä p ja q ovat piin n :nsiä konvergentteja ja määritellään sen ketjumurtolukuesityksestä. Erityisesti n :s konvergentti on tarkka vain tiettyyn desimaaliin asti. Mikäli haluaisimme luvun π likiarvon kymmenen desimaalin tarkkuudella, kuinka mones konvergentti takaa halutun tarkkuuden? Osoittautuu että kuudes konvergentti $\{3; 7, 15, 1, 292, 1, 1\}$ sievennettyinä rationaalilukuna $208341/66317$ on piin likiarvo kymmenen desimaalin tarkkuudella.

Luvun $\sqrt{2}$ likiarvo kymmenen desimaalin tarkkuudella saavutetaan vasta 13. konvergentilla, eli rationaaliluvulla $114243/80782$. Onkin määritelty, että *luku on sitä irrationaalisempi, mitä hitaammin sen konvergentit lähestyvät lukua*. Muistetaan, että konvergentit ovat aina sievennetty esitys kyseisen luvun ketjumurtoluvusta. On selvää, että mitä suurempia kokonaisluvut λ_n ketjumurtoluvussa $\{\lambda_0; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ ovat, sitä pienempi on jakojäännös; toisinsanoen sitä nopeammin konvergentit lähestyvät lukua. Erityisesti siis hitaimmin konvergoituva ketjumurtoluku on sellainen, jossa kaikki kokonaisluvut λ_n ovat ykkösiä. Näin ollen kultainen leikkaus $\{1; \bar{1}\}$ on irrationaalisin luku.

2.4 Kultaisen leikkauksen perusominaisuuksia

Vaikka kultainen leikkaus α voidaan määritellä äärettömänä ketjumurtolukuna, on kuitenkin käytännöllisempää käyttää arvoa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vastaavasti luvulle β on luonnollista käyttää arvoa $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Esitellään seuraavaksi lukujen ominaisuuksia.

Lause 2.2.

$$(2.3) \quad \alpha\beta = -1$$

$$(2.4) \quad \alpha^2 = \alpha + 1$$

$$(2.5) \quad \alpha + \beta = 1$$

$$(2.6) \quad \alpha^2 + \beta^2 = 3$$

$$\beta^2 = \beta + 1$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{5}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{5}.$$

Todistetaan yhtälöistä ensimmäinen (2.3), kolmas (2.4), viides (2.5) ja seitsemäs (2.6) päteviksi. Muut kohdat ovat ratkaistavissa vastaavasti.

$$\alpha\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1^2 - \sqrt{5}^2}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \Rightarrow (2.3),$$

$$\beta^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1^2 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{4} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \beta + 1 \Rightarrow (2.4),$$

$$\alpha - \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - (-\sqrt{5})}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \Rightarrow (2.5),$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \alpha + 1 - (\beta + 1) = \alpha - \beta = \sqrt{5} \Rightarrow (2.6).$$

Viimeisessä yhtälössä käytettiin yhtälöiden 2.4 ja 2.5 tuloksia. Yhtälö 2.4 lienee näistä tärkein, ja olemme törmänneet siihen jo useasti. Merkittävä lisähuomio yhtälöstä on se, että luvun α tai β potensseja voidaan toistuvalla yhtälön 2.4 sijoituksella redusoida lineaariseksi; esimerkiksi $\alpha^3 = \alpha^2\alpha = (\alpha + 1)\alpha = \alpha^2 + \alpha = (\alpha + 1) + \alpha = 2\alpha + 1$.

Yhtälö 2.3 on yksinkertainen relaatio lukujen α ja β välillä, ja tulos 2.6 on puolestaan tärkeä havainto Fibonaccin luvun yleistä kaavaa johtaessa. Perehdyttyämme nyt kultaisen leikkauksen ominaisuuksiin analyttisesti, onkin syytä siirtyä tutkimaan kultaiselle leikkaukselle läheisiä Fibonaccin lukuja.

Luku 3

Fibonaccin lukujono

Fibonaccin luvut liittyvät läheisesti kultaiseen leikkaukseen, mitä olen jo aiemmin vihaillut. Esittelen ensin kuitenkin historiaa, mitä luvuilla ja sen keksijällä on. 1170-luvulla pisalaiseen Bonaccin perheeseen syntyi poika, joka sai nimekseen Leonardo. Hän sai kuitenkin lempinimen Fibonacci, joka oli lyhenne sanasta *Bonaccin poika*. Kun Fibonacci oli varttunut nuoreksi mieheksi, hänen isänsä otti poikansa matkoilleen, jolloin Fibonacci tutustui erääseen muslimiopettajaan, joka myöhemmin opetti hänelle hindu-arabilaisen numerojärjestelmän. Keskiajalla Euroopassa oli käytössä vielä roomalainen numerojärjestelmä, mikä oli puutteellinen matematiikan kirjoittamiseen mm. lukuteoreettisesta näkökulmasta.

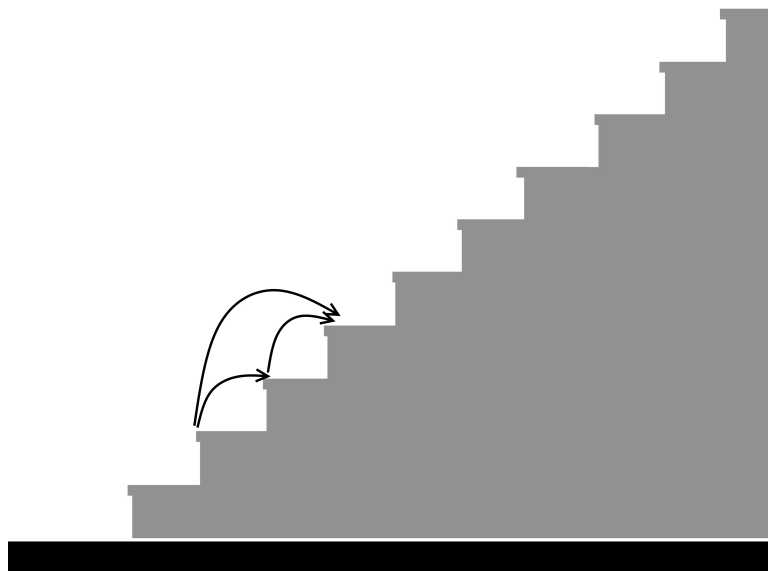
Fibonacci julkaisi vuonna 1202 teoksen *Liber Abaci*. Kirjan tunnetuimpana osana on kaniongelma, jonka ratkaisu perehdyttää lukijan Fibonacci lukuihin. Ongelmia, joissa ratkaisu voidaan ilmaista Fibonacci lukujen avulla, on lukuisia. Klassisen kaniongelman sijaan, esittelen lukijalle nyt Fibonacci luvut hieman matemaattisemmalla tavalla, jonka itse koen kaniongelmaa modernimmaksi versioksi.

3.1 Porrasesimerkki

Olkoon portaikossa n porrasta. Yhdellä askeleella henkilö voi kulkea yhden tai kaksi porrasta ylöspäin. Kuinka monella eri tavalla portaikko voidaan kiivetä?

Merkitään F_n :llä eri vaihtoehtojen määrää ja merkitään kiipeämistapaa jonolla, joka koostuu luvuista 1 ja 2 kuvastaen kuinka monen portaan yli kyseisellä askeleella noustaan. Esimerkiksi jono (2,1,1) kuvaa $2 + 1 + 1 = 4$ portaista portaikkoa, joka kuljetaan ylös 2-, 1- ja 1-askeleilla tässä järjestyksessä.

Pohditaan sitten ratkaisuja eri n arvoilla. Kun $n = 0$, niin $F_n = 1$, sillä portaikko voidaan kiivetä vain yhdellä tapaa; kulkematta yhtään askelta. Kun $n = 1$, niin $F_n = 1$,



Kuva 3.1: Kaksi porrasta voidaan nousta joko kahdella 1-askeleella tai yhdellä 2-askeleella.

sillä portaikko voidaan kiivetä vain yhdellä askeleella. Kun $n = 2$, niin $F_n = 2$, sillä portaikko voidaan kiivetä joko kahdella 1-askeleella tai yhdellä 2-askeleella. Kun $n = 3$, niin $F_n = 3$, sillä ratkaisut ovat $(1,1,1)$, $(1,2)$, ja $(2,1)$. Kun $n = 4$, niin $F_n = 5$, sillä ratkaisut ovat $(1,1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$, $(1,1,2)$ ja $(2,2)$. Kun $n = 5$, niin $F_n = 8$, sillä ratkaisut ovat $(1,1,1,1,1)$, $(1,2,1,1)$, $(2,1,1,1)$, $(1,1,2,1)$, $(2,2,1)$, $(1,1,1,2)$, $(1,2,2)$ ja $(2,1,2)$.

Voidaan nyt huomata yhteys eri F_n arvojen välillä. Ensimmäiset viisi F_5 :n jonoa saadaan, kun F_4 :n jonoihin lisätään perään luku 1, ja loput kolme F_5 :n jonoa saadaan F_3 :n jonoista lisäämällä jonon perään luku 2. Näin voidaan tehdä, sillä lisäämällä F_4 jonoon 1-askel, muuttaa kuljettujen portaiden määrää yhdellä ja ratkaisu soveltuu 5-portaikkoon. Samoin lisäämällä 2-askel F_3 jonoon muuttaa jonon portaiden määrää kahdella ja tämä ratkaisu soveltuu myös 5-portaikkoon. Näyttäisi siis siltä, että ratkaisujen määrä porrasta suuremmalle portaikolle saadaan kahden edellisen portaikon ratkaisujen summana. Tämän rekursion tuottamat luvut ovat nimeltään *Fibonaccin lukujonon* jäseniä ja määritellään siis seuraavasti.

Määritelmä 3.1. Fibonaccin luvut F_n , missä $n > 1$ saadaan rekursioyhtälöstä

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{missä } F_0 = F_1 = 1$$

Osoitetaan seuraavaksi, että porrasesimerkissämme n -portaikon ratkaisujen määrä on F_n .

Todistus. Lisäämällä 1-askel F_{n-1} ratkaisujonojen loppuun saadaan F_n ratkaisujonoja, ja lisäämällä 2-askel F_{n-2} ratkaisujonojen loppuun saadaan myös F_n ratkaisujonoja. Siten F_n

ratkaisujen määrä on summa F_{n-1} ja F_{n-2} ratkaisuista. Tulee kuitenkin näyttää, etteivät mitkään tällä tavoin tuotetut ratkaisut ole samoja, ja että menetelmä tuottaa kaikki mahdolliset ratkaisut.

Näytetään seuraavaksi, etteivät mitkään tällä tavoin generoidut ratkaisut F_n ole samoja n -portaikolle. Selvästi F_{n-1} jonot ovat keskenään erilaiset ja lisäämällä 1-askel jonon perälle erilaisuus säilyy. Sama pätee F_{n-2} jonoille, mutta nyt jonon perään lisätään 2-askel. Tällä tavoin F_{n-1} ja F_{n-2} jonoista generoidut jonot ovat keskenään erilaiset, sillä niissä jonon viimeisenä jäsenenä on eri luku. Siis kaikki F_n :n ratkaisut ovat erilaisia.

Näytetään vielä, että tällä tavoin saadaan kaikki erilaiset ratkaisujonot. Oletetaan vastoin, että on olemassa F_n :n jono a , jota ei saa generoitua F_{n-1} tai F_{n-2} ratkaisujonoista. Poistamalla nyt jonon a viimeinen jäsen, muuttaa jonon F_{n-1} tai F_{n-2} ratkaisuksi riippuen poistettiin jonosta 1- vai 2-askel. Tämä on ristiriita, sillä F_{n-1} ja F_{n-2} sisältävät kaikki mahdolliset ratkaisujonot. \square

Kuten edellä määrittelimme, Fibonaccin lukujonon F_n jäsenet saadaan siis kahden edellisen jäsenen summana. Käytännöstä riippuen jonon ensimmäiset jäsenet voivat olla joko 0 ja 1, tai 1 ja 1, mutta tämä valinta vaikuttaa vain jäsenten indeksöinnin siirtämiseen yhdellä. Käytän tässä tutkielmassani ensimmäisinä jäseninä $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$, jolloin Fibonaccin lukujonon kymmenen ensimmäistä jäsentä ovat: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

Fibonaccin luvuilla on kiehtovia ominaisuuksia ja lukuisia eri rekursiokaavoja, joihin tämä tutkielma ei kuitenkaan syvenny aiheen laajuuden vuoksi. Sen sijaan käsittelen Fibonaccin lukujen yhteyttä kultaiseen leikkaukseen erityisesti eksplisiittisellä ratkaisukaavalla sekä matriisien ja yleistettyjen Fibonaccin lukujonojen kautta.

3.2 Binet'n kaava

Fibonaccin lukujonossa toteutuva rekursioyhtälö $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ on homogeeninen 2. asteen differenssiyhtälö. Differenssiyhtälöt ovat diskreettejä differentiaaliyhtälöitä, joissa seuraava arvo saadaan määrättyllä rekursiolla edellisistä arvoista. En tässä tutkielmassani perehdy syvällisemmin differenssiyhtälöiden ratkaisumalleihin, mutta aiheesta voi halutessaan lukea lisää verkko-osoitteesta

(<http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/c2003/ZTransformDEMod.html>). Seuraavaksi näytän, miten Fibonaccin rekursioyhtälöstä saadaan muotoiltua kaava jonon n -jäsenen ratkaisemiseksi eksplisiittisesti. Tämä onnistuu käyttämällä kyseiselle differenssiyhtälölle toimivaa ratkaisumallia.

Differenssiyhtälön laatu on sellainen, että se ratkeaa sijoituksella $F_n = Ar^n$, mikä pätee kaikilla $n \geq 2$. Nyt etsitään mahdolliset arvot A ja r , jotka toteuttaisivat rekursioyhtälön.

Saadaan

$$\begin{aligned} Ar^{n+2} &= Ar^{n+1} + Ar^n & | : Ar^n (\neq 0) \\ r^2 &= r^1 + 1 \\ r^2 - r - 1 &= 0 . \end{aligned}$$

Jälleen päädyimme tuttuun polynomiyhtälöön, jonka ratkaisuna ovat kultainen leikkaus α sekä β . Nyt homogeenisen differenssiyhtälön $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ yleinen ratkaisu on muotoa $F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$, joillakin reaalilla vakioilla c_1 ja c_2 . Koska tiedämme alkuarvot $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$, niin voidaan kirjoittaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 0 = F_0 = c_1\alpha^0 + c_2\beta^0 = c_1 + c_2 \\ 1 = F_1 = c_1\alpha^1 + c_2\beta^1 = c_1\alpha + c_2\beta , \end{cases}$$

josta saadaan ratkaistuksi $c_1 = 1/(\alpha - \beta)$ ja $c_2 = -c_1 = -1/(\alpha - \beta)$. Sijoittamalla näin saadut vakiot yleisen ratkaisun kaavaan $F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$(3.2) \quad F_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\alpha^n - \frac{1}{\alpha - \beta}\beta^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Tämä yhtälö tunnetaan nimellä Binet'n kaava ja se ilmaisee Fibonaccin lukujonon n :nen jäsenen ilman rekursiota. Kaava kantaa ranskalaisen matemaatikon Jacques Phillipe Marie Binet'n nimeä, joka päätyi tulokseen vuonna 1843, vaikka Abraham DeMoivre oli törmännyt tulokseen yli vuosisataa aiemmin vuonna 1718. Varsinainen Binet'n yleinen kaava on muotoa

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{m^2 + 4}} .$$

Valinnalla $m = 1$ päädytään tulokseen 3.2, sillä $\sqrt{5} = \alpha - \beta$, ja tällöin $U_n = F_n$. Fibonaccin luvuilla ja kultaisella leikkauksella näyttäisi siis olevan yhteys toisiinsa. Nyt olemme valmiita näyttämään erityisen tuloksen: kahden peräkkäisen Fibonaccin luvun suhde lähestyy kultaista leikkausta, kun jonon jäsenet lähestyvät ääretöntä.

Lause 3.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$.

Todistus. Tutkitaan ensin mitä on $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta/\alpha)^n$.

$$|\beta/\alpha| = \left| \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right| < 1, \text{ jolloin } (\beta/\alpha)^n \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Kirjoittamalla Fibonaccin luvut F_{n+1} ja F_n Binet'n kaavan avulla saadaan peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhteesta

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta\beta^n}{\alpha^n(1 - (\beta/\alpha)^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \beta(\beta/\alpha)^n}{1 - (\beta/\alpha)^n} \rightarrow \frac{\alpha - \beta \cdot 0}{1 - 0} = \alpha, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

□

Luvussa 2.2 määrittelimme kultaisen leikkauksen äärettömänä ketjumurtolukuna $\{1, \bar{1}\}$. Tämä liittyy olennaisesti peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhteeseen. Tutkitaan miten peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhdetta saa redusoitua edellisten Fibonaccin lukujen suhteeksi,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}.$$

Nyt nimittäjässä olevan osamäärän jäsenten indeksejä (F_n/F_{n-1}) saa edelleen pienennettyä ylläolevalla sijoituksella, jolloin

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}}.$$

Tätä voidaan toistaa, kunnes päädytään osamäärään $(F_2/F_1) = 1$. Seuraavaa osamäärää (F_1/F_0) ei voi esittää, sillä siinä suoritettaisiin nolalla jako. Nyt Fibonaccin lukujen suhde on muutettu äärelliseksi ketjumurtoluvuksi $\{1; a\}$, missä $a = \{1, 1, \dots\}$ ja sen pituus on $n - 1$. Selvästi jos $n \rightarrow \infty$ niin ketjumurtoluvusta tulee ääretön, ja esitys $\{1, \bar{1}\}$ vastaa kultaista leikkausta α .

3.3 Fibonaccimatriisit

Käytän tässä kappaleessa nimitystä Fibonaccimatriisi 2×2 -matriisista, jonka alkiot ovat Fibonaccin lukuja seuraavasti:

$$M_n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Fibonaccin lukuja käsittelevässä kirjallisuudessa ei ylläolevalle matriisille ollut annettu omaa nimeä tai sen oli todettu olevan Fibonaccin lukujonon matriisiesitys. Mielestäni Fibonaccimatriisi on kuitenkin lyhyt nimitys ja kuvastaa hyvin käsitettä, varsinkin kun tulemme viittaamaan siihen. Tulen seuraavaksi johtamaan Fibonaccin lukujonon matriisien avulla.

Tutkitaan matriiseja $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ja sen potensseja,

$$\begin{aligned} Q^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ Q^3 &= QQ^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \\ Q^4 &= QQ^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näyttäisi siis siltä, että Q :n potenssit ovat Fibonaccimatriiseja. Tämä ei ole sattumaa, vaan näin todella on. Todistetaan tämä seuraavaksi.

Lause 3.4.

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Näytetään ensin, että väite pätee pienimmällä luonnollisella luvulla.

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix},$$

joten väite pätee kun $n = 1$.

Tehdään induktio-oletus, eli oletetaan, että väite pätee jollakin n ,

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Näytetään, että tällöin väite pätee myös luvulla $n + 1$,

$$\begin{aligned} Q^{n+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Induktioperiaatteen mukaisesti väite pätee kaikilla n . □

3.4 Yleistetty Fibonacci lukujono

Olet saattanut miettiä Fibonacci lukujen yhteydessä, miksi jono alkoi luvuilla 0 ja 1. Fibonacci luvut määräytyvät additiivisesta rekursiosta juuri näillä alkuarvoilla, mutta alkuarvot olisivat voineet olleet mitä tahansa. Fibonacci lukujono onkin siis erityistapaus yleisesti määritellystä additiivisesta rekursiojonosta. Määritellään seuraavaksi yleistetty Fibonacci lukujono sekä kaava sen jäsenen laskemiseksi.

Määritelmä 3.5. Olkoon jonon G_n ensimmäiset jäsenet $G_0 = p$ ja $G_1 = q$. Jono G_n on yleistetty Fibonacci lukujono, jos sen jäsenille pätee rekursioyhtälö $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$.

Selvästi alkuarvoilla $p = 0$ ja $q = 1$ on kyseessä Fibonacci lukujono. Mutta jos Fibonacci jono on vain yksi erityistapaus, miksi nimi kantaa Fibonacci jonon nimeä? Kirjoitetaan jonon ensimmäisiä jäseniä ylös, jolloin saatamme huomata yhteyden jonojen välillä.

n	F_n	G_n
0	0	p
1	1	q
2	1	$p + q$
3	2	$p + 2q$
4	3	$2p + 3q$
5	5	$3p + 5q$
6	8	$5p + 8q$

Koska kahden edellisen jäsenen arvot summataan yhteen, voidaan kahdesta edellisestä jäsenestä p :t ja q :t laskea erikseen, ja yhdistää ne lopuksi summamerkillä. Nähdään ettei lukua q esiinny G_0 :ssa, ja että se esiintyy kerran G_1 :ssä. Nämä ovat samat kuin Fibonacci jonon alkuarvot. Siispä q :n määrä jäsenessä G_{n+2} on $F_{n+2}q$. Vastaavasti huomataan, että p ei esiinny G_1 :ssä, mutta esiintyy kerran G_2 :ssa, joten p :n määrä jäsenessä G_{n+2} on $F_{n+1}p$. Siispä yleistetylle Fibonacci lukujonolle saadaan kaava jäsenen G_n laskemiseksi.

Lause 3.6. Yleistetylle Fibonacci lukujonolle G_n , missä $G_0 = p$ ja $G_1 = q$, pätee

$$G_{n+2} = F_{n+1}p + F_{n+2}q .$$

Mielenkiintoinen huomio yleistetyssä Fibonacci lukujonossa on se, että rekursioehto takaa peräkkäisten jäsenten suhteelle saman raja-arvon kuin Fibonacci lukujonon tapauksessa. Peräkkäisten jäsenten suhteesta saadaan siis

$$\frac{G_{n+2}}{G_{n+1}} = \frac{G_{n+1} + G_n}{G_{n+1}} = 1 + \frac{G_n}{G_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{G_{n+1}}{G_n}} .$$

n	F_n	L_n
0	0	2
1	1	1
2	1	3
3	2	4
4	3	7
5	5	11
6	8	18

Taulukko 3.1: Fibonaccin ja Lucasin seitsemän ensimmäistä lukua.

Jälleen, kuten Fibonaccin lukujen tapauksessa, sijoittamalla iteratiivisesti kaavaan kunnes saadaan ensimmäisten jäsenten suhde, kehittyy ketjumurtoluku äärelliseen määrään ykkösiä, jonka viimeisenä arvona on $G_1/G_0 = q/p$. Erityisesti kun $n \rightarrow \infty$, ketjumurtoluvusta tulee $\{1; \bar{1}\}$, eli $G_{n+1}/G_n \rightarrow \alpha$.

Edellä etenimme siten, että esittelin Fibonaccin lukujonon, jonka myöhemmin vasta totesin olevan yleistetyn Fibonaccin jonon erityistapaus valituilla alkuarvoilla. Edetään seuraavaksi toisinpäin; valitaan yleistetylle Fibonaccin lukujonolle erityiset alkuarvot ja generoidaan lukujono, jota voisi kutsua Fibonaccin jonon sisareksi. Kyseessä on Lucasin jono.

Määritelmä 3.7. L_n on Lucasin jono, jolle pätee $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ ja seuraava jäsen saadaan rekursioyhtälöstä $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.

Lucasin jono saadaan siis yleistetystä Fibonaccin lukujonosta alkuarvoilla $G_0 = 2$ ja $G_1 = 1$. Taulukoidaan seuraavaksi ensimmäisiä Lucasin jonon jäseniä ja rinnastetaan ne Fibonaccin lukuihin vastaavilla indekseillä.

Lucasin luvut näyttäisivät olevan eri lukuja kuin Fibonaccin lukujonossa, eikä yhteys jonojen välillä ole välttämättä ilmeinen. Esimerkiksi jokainen Lucasin luku on summa seuraavasta ja edellisestä Fibonaccin luvusta. Toisin sanoen

$$(3.8) \quad L_n = F_{n+1} + F_{n-1}.$$

Tämän voit tarkistaa myös taulukosta 3.1. Aivan kuten Fibonaccin luvuille, myös Lucasin luvuille on yleinen kaava, jolla luku voidaan ratkaista ilman rekursiota. Todistetaan seuraavaksi Binet'n kaava Lucasin luvuille.

Lause 3.9 (Binet'n kaava Lucasin luvuille).

$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Todistus. Ratkaistaan yhtälöstä 3.8 Fibonaccin luvut niille ratkaistulla Binet'n kaavalla 3.2,

$$\begin{aligned} L_n = F_{n+1} + F_{n-1} &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha^n \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - \beta^n \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \right]. \end{aligned}$$

Edellisessä luvussa ratkaistiin ominaisuus $\alpha\beta = -1$, ja tästä saadaan edelleen yhtäpitävyydet $1/\alpha = -\beta$ ja $1/\beta = -\alpha$. Sijoittamalla nämä ylläolevaan yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^n (\alpha + (-\beta)) - \beta^n (\beta + (-\alpha))] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^n (\alpha - \beta) + \beta^n (\alpha - \beta)] \\ &= \alpha^n + \beta^n. \end{aligned}$$

□

Kuten huomattiin, myös Lucasin luvuista löytyy yhteys kultaiseen leikkaukseen. Fibonaccin ja Lucasin lukujonojen välillä on lukuisia muitakin kaavoja, joita aiheen laajuuden en tässä kuitenkaan käsittele. Mainitsemisen arvoisia tuloksia ovat monet jaollisuuteen liittyvät lauseet sekä suurten Fibonaccin lukujen laskeminen indeksiltään paljon pienemmistä Fibonaccin ja Lucasin luvuista. Toivottavasti tämän luvun myötä edellä esitetyt rekursiiviset jonot ovat tulleet perusominaisuuksiltaan tutuiksi. Seuraavassa luvussa siirrytäänkin Fibonaccin jonon mukaisiin geometrisiin konstruktioihin ja sitä kautta kultaisten leikkauksen ilmentymiin geometriassa.

Luku 4

Kultainen leikkaus geometriassa

Edellisissä luvuissa käsitelimme kultaista leikkausta analyyttisestä näkökulmasta. Olen tarjonnut sille useita esitysmuotoja, niin irrationaalilukuna kuin äärettömänä ketjumurtolukuna. Tässä luvussa esitän kultaistelle leikkaukselle visuaalisen presentaation, joka toivottavasti selventää luvun ominaisuuksia, kuten yhteyttä Fibonaccin lukuihin. Ensin parhaimpina kultaisten leikkauksen geometriaa käsittelevistä teoksista.

De divina proportione (1509) on Luca Paciolin kirjoittama ja Leonardo Da Vincin kuvittama kirja, jossa esitellään kultaisten leikkauksen soveltumia geometriaan, taiteeseen kuin arkkitehtuuriinkin. Teoksessa verrataan muun muassa ihmisestä löytyviä suhteita arkkitehtuurissa tavattuihin mittoihin, jotka ovat kultaistessa suhteessa. *Vitruviuksen mies* on Da Vincin tunnettu piirustus, jossa esitetään nämä ihanteelliset suhteet ihmisen ruumiinosien pituuksille.

Yleisesti taiteessa kultaisten leikkauksen toteuttavia geometrisia muotoja voidaan käyttää näkyvästi tai piilevästi objekteja sommitellessa. Kuvassa 4.1 on Salvador Dalin tunnettu teos *Sacrament of the Last Supper*. Teoksesta voi löytää kanvaksen sivujen olevan kultaistessa suhteessa, samoin kun taustalla näkyvien ikkunoiden muodostavat dodekaedrin; eräs kultaisten leikkauksen toteuttava monitahokas sekin.

Esittelen seuraavaksi kultaisten leikkauksen konstruktion, jonka jälkeen voidaan määrittellä ns. kultaist kolmiot. Näistä päästään luontevasti tarkastelemaan muita geometrisia monikulmioita ja -tahokkaita, sekä osoittamaan niiden laajennuksen yhteys kultaisteen leikkaukseen. Lopuksi esittelen epäsäännöllisen Penrosen laatoituksen ja tämän tessellaation ominaisuuksia.



Kuva 4.1: *Sacrament of the Last Supper* -maalauksesta voi löytää useita kultaisia suhteita. [<https://www.americamagazine.org/issue/misunderstood-masterpiece>]

4.1 Kultaisen leikkauksen konstruktio ja kultaiset monikulmiot

Konstruktio tarkoittaa halutun matemaattisen kuvion piirtämistä euklidisella geometrialla eli käyttämällä apuvälineinä harppia ja viivainta. Konstruktioit voivat olla esimerkiksi geometrisia monikulmioita, mutta tässä kappaleessa konstruimme janan, jonka pituus on kultainen leikkaus. Kaikkea ei myöskään ole mahdollista konstruoida. Muun muassa parittomien juurten konstruktioit eivät onnistu kaikilla luvuilla.

Ilman varsinaista piirtämistä voidaan kultaisen leikkauksen todeta olevan konstruoitavissa. Tämä seuraa algebran tiedoista, jonka mukaan luku on konstruoitavissa, jos se saadaan esitettyä neljän aritmeettisen perusoperaation sekä neliöjuurioperaation avulla. Erityisesti luku $(1 + \sqrt{5})/2$ on tällainen ja siis konstruoitavissa. Katsotaan seuraavaksi, miten tämä onnistuu.

Esimerkki 4.1. Piirretään neliö $ABCD$, jonka sivun pituus on 1. Merkitään janan AB keskipistettä kirjaimella E , jolloin $|AE| = 1/2$. Piirretään jana EC , jonka pituudeksi

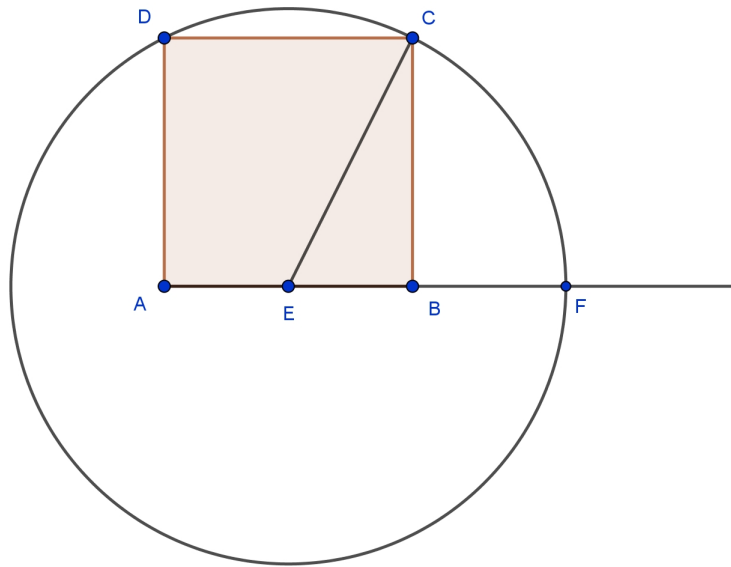
Pythagoraan lauseella saadaan

$$\begin{aligned} |EC|^2 &= |EB|^2 + |BC|^2 \\ |EC| &= \sqrt{|EB|^2 + |BC|^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Piirretään sitten ympyrä, jonka keskipisteenä on E ja säteenä EC . Jatketaan vielä puolisuoraa AB , joka leikkaa ympyrän pisteessä F . Nyt janan AF pituus on

$$|AF| = |AE| + |EF| = |AE| + |EC| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha.$$

.

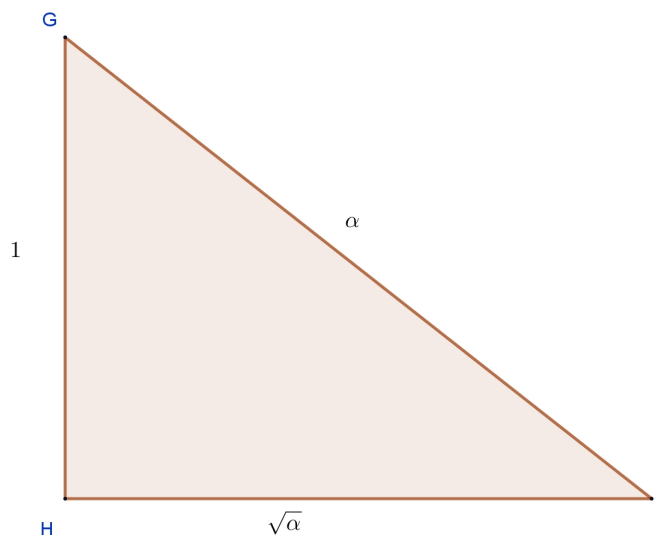


Kuva 4.2: Kultaisen leikkauksen eräs konstruktio.

Edellisen esimerkin mukaisesti jana, jonka pituus on kultainen leikkaus, on konstruoitavissa. Geometrian tiedoilla siten myös $\sqrt{\alpha}$ on konstruoitavissa. Nyt huomiomme siirtyy erityiseen suorakulmaiseen kolmioon GHI , jonka kateetteina ovat pituudet $|GH| = 1$ ja $|HI| = \sqrt{\alpha}$. Ratkaistaan Pythagoraan teoreemalla hypotenuusan GI pituus,

$$|GI| = \sqrt{|GH|^2 + |HI|^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{\alpha}^2} = \sqrt{1 + \alpha} = \sqrt{\alpha^2} = \alpha.$$

Edellä käytimme luvussa 2.2 havaittua ominaisuutta $\alpha^2 = \alpha + 1$. Huomataan, miten sivujen suhteet $\alpha : \sqrt{\alpha} : 1$ ovat kultaisen leikkauksen neliöjuuri. Tätä monikulmiota kutsutaan nimellä *kultainen suorakulmainen kolmio*.



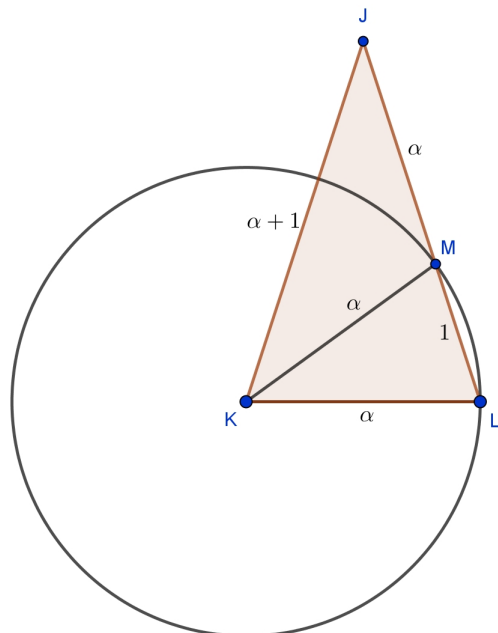
Kuva 4.3: Kultaisessa suorakulmaisessa kolmiossa sivujen suhteet ovat pienenevässä suurusjärjestyksessä yhtä suuret; $\alpha : \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha} : 1$.

Tutkitaan seuraavaksi, miten kultainen leikkaus liittyy tasakylkisiin kolmioihin. Piirretään tasakylkinen kolmio JKL , jonka kannan KL pituus on $|KL| = \alpha$ ja kylkien pituudet ovat $|JK| = |JL| = \alpha + 1$. Etsitään piste M janalta JL siten, että $|KM| = \alpha$. Tämä löydetään K -keskipisteisen, KL -janaisen ympyrän, sekä janan JL leikkauksesta. Piirretään jana KM ja määritellään konstruktion muut etäisyydet. Koska kolmion $\triangle JKL$ kantakulma $\angle JLK$ on sama kuin kolmion $\triangle KLM$ kantakulma, niin molempien kolmioiden ollessa tasakylkisiä seuraa näiden yhtenevyys:

$$\triangle JKL \sim \triangle KLM.$$

Tästä voidaan edelleen ratkaista janojen LM ja MJ pituudet. Kolmioiden yhtenevyydestä saadaan

$$\frac{|LM|}{|KL|} = \frac{|KL|}{|JK|} \leftrightarrow |LM| = \frac{|KL|^2}{|JK|} = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1,$$



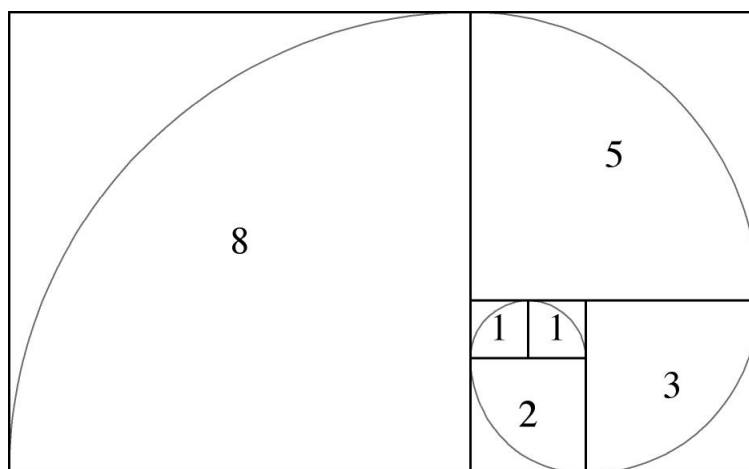
Kuva 4.4: Kultaisen kolmion sisään voidaan konstruoida pienempi kultainen kolmio ja kultainen gnomoni.

jolloin janan MJ pituudeksi tulee $|MJ| = |LJ| - |LM| = (\alpha + 1) - 1 = \alpha$. Kostruktiosta huomataan, että tasakylkisen kolmion sisälle saatiin muodostettua pienempi yhtenevä kolmio $\triangle KLM$ sekä litteä tasasivuinen kolmio $\triangle MJK$. Nämä kolmiot tunnetaan nimellä kultainen kolmio ja kultainen gnomoni, jotka määritellään seuraavasti.

Määritelmä 4.2. Tasakylkinen kolmio on *kultainen kolmio*, jos sen kylki ja kanta ovat kultaisessa suhteessa: $|kylki|/|kanta| = \alpha$. Tasakylkinen kolmio, jonka kannan suhde kylkeen on kultainen leikkaus, eli $|kanta|/|kylki| = \alpha$, on nimeltään *kultainen gnomoni*.

4.2 Kultaiset suorakulmiot ja Fibonaccin spiraali

Edellisessä luvussa muodostimme kultaisen kolmion sisään pienemmän kultaisen kolmion sekä kultaisen gnomonin. On selvää, että näin syntyneet kolmiot voidaan edelleen korvata kyseisellä sijoituksella, ja että tätä voidaan toistaa mielivaltaisen pitkälle. Menetelmän nimi on *deflaatio*. Esitän tässä kappaleessa kenties tunnetuimman kultaiseen leikkaukseen liittyvän, kultaisten suorakulmioiden, deflaation.



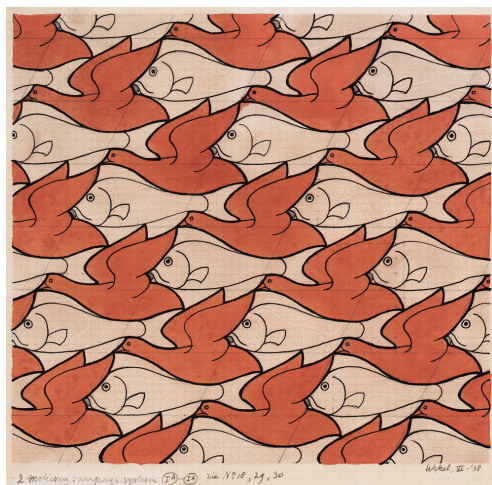
Kuva 4.5: Fibonaccin spiraalin muodostavien neliöiden sivujen pituudet ovat Fibonaccin lukuja. [<https://www.linkedin.com/pulse/fibonacci-spiral-nature-utkarsh-gaikwad/>]

Olkoon kultaisen suorakulmion sivujen pituudet α ja 1. Kun kultaisen suorakulmion sisään sijoittaa maksimaalisen neliön siten, että sen kolme sivua ovat suorakulmion sivuilla, suorakulmio jakautuu kyseiseksi neliöksi ja pienemmäksi suorakulmioksi. Erityisesti nyt pienemmän suorakulmion sivujen suhde on $1 : (\alpha - 1) = 1 : 1/\alpha = \alpha$, ja on siten myös kultainen suorakulmio. Edelleen pienempi kultainen suorakulmio voidaan korvata neliöllä ja vielä pienemmällä kultaisella suorakulmiolla; näin saadaan aikaan deflaatio, jota voidaan jatkaa mielivaltaisen pitkälle. Piirtämällä deflaatioissa syntyviin neliöihin ympyräkaari vastakkaisten nurkkien välille saadaan muodostettua nk. *Fibonaccin spiraali*.

Tyypillisesti Fibonaccin spiraali muodostetaan kuitenkin konstruktioista ulospäin kasvavalla menetelmällä. Piirretään aluksi vierekkäin kaksi neliötä, joiden sivun pituus on yksi. Kuviota jatketaan niin, että edellisen neliön viereen piirretään neliö, jonka sivun pituus on kahden edellisen neliön sivun pituuksien summa, kuten kuvassa 4.5. Ensimmäisen kuuden neliön sivun pituudet ovat siten 1, 1, 2, 3, 5 ja 8. Rekursiosta johtuen neliöiden sivujen pituudet muodostavat Fibonaccin lukujonon, mistä selittyy myös nimitys. Neliöihin piirretyt ympyräkaaret muodostavat lopulta Fibonaccin spiraalin.

4.3 Penrosen laatoitus

Tesselaatio, eli laatoitus, on menetelmä, jossa taso voidaan täyttää yhdellä tai useammalla geometrisella kuviolla siten, etteivät kuviot mene päällekkäin eikä tasoon jää aukkoja. Esimerkiksi seinäkaakeleiden laatoituksessa käytetään usein neliölaattoja; lattian peittäminen parkettilaudoilla on laatoitus sekin. Lisäksi laatat voivat olla mitä tahansa muotoja,

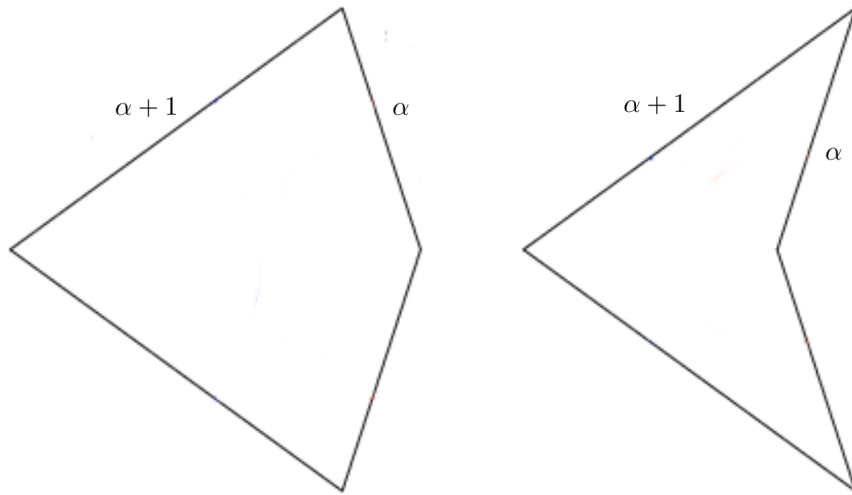


Kuva 4.6: M.C. Escherin lintu ja kala -tesselaatiossa käytetään kahta erilaista laattaa. [<https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/bird-fish>]

kunhan laatoitusehdot täyttyvät. Kuvataiteilija-graafikko M.C. Escherin tesselaatiopiirustuksessa laattoina ovatkin linnut ja kalat. Edellä esitetyille laatoitukselle on ominaista se, että ne ovat jaksollisia, jolloin ne sisältävät joitakin symmetrioita. Esimerkiksi neliölaatoitus on rotaatiosymmetrinen $\pi n/2$ kulmilla. Tämä tarkoittaa sitä, että tason laatoitus säilyy, jos jokaista neliötä kiertää keskipisteensä suhteen 90 astetta tai sen moninkertoja. Kierrot ovat mahdollisia myös tiettyjen pisteiden suhteen. Mikäli kiertokulma on jotain muuta, neliöt menevät osittain päällekkäin ja tasoon tulee aukkoja; kyseessä ei ole enää laatoitus.

Edellisessä luvussa esittelin kultaisen leikkauksen toteuttavia kolmioita, ja nyt herääkin kysymys: voidaanko taso laatoittaa kultaisilla monikulmioilla? Osoittautuu, että laatoitus todella voidaan tehdä. Sen sijaan, että käyttäisimme varsinaisesti kultaisia monikulmioita, käytämme kahta erilaista nelikulmioita, jotka on koostettu kahdesta kultaisesta kolmiosta ja kahdesta kultaisesta gnomonista asettamalla ne kyljet vierekkäin. Syntyvistä laatoista käytetään kuvaavasti nimiä *leija* ja *nuoli*, joiden sivujen pituudet ovat laatan muodostavien kultaisten kolmioiden mukaiset.

Leijoista ja nuolista muodostettava tesselaatio on nimeltään Penrosen laatoitus ja kantaa keksijänsä Roger Penrosen nimeä. Laatoitus on kuitenkin laajalti käytetty sen erikoisilta ominaisuuksiltaan ja esimerkiksi Helsingin Keskuskatu on laatoitettu alteroidulla Penrosen laatoituksella. Laatoitus voidaan tehdä myös mm. kultaisilla kolmioilla muuntamalla leijat ja nuolet kahdeksi kultaiseksi kolmioksi. Toinen yleinen Penrosen laatoitus saadaan käyttämällä kapeaa ja leveää neljäkstä, jotka taas on muodostettu kahdesta samanlaisesta kultaisesta kolmiosta asettamalla ne pohjat vastakkain.



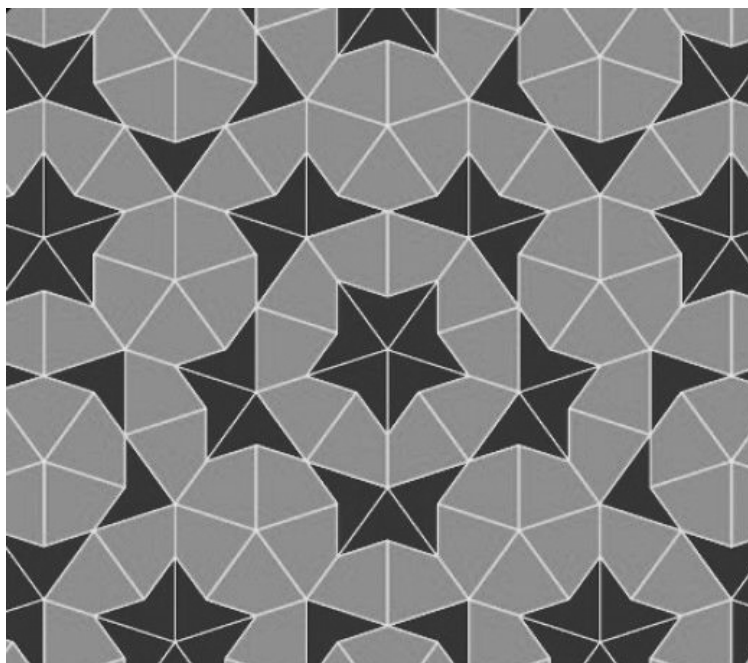
Kuva 4.7: Penrosen laatoituksessa käytettävät leija ja nuoli -laatat.

Tarkastelemalla Penrosen laatoitusta 4.8 voidaan huomata, ettei laatoitusta säilyttävää symmetriaa löydy kuin yhden pisteen suhteen. Lisäksi tämä symmetria on viisinkertainen, minkä luultiin pitkään olevan mahdotonta tason laatoituksille. Muita symmetriapisteitä laatoituksesta ei löydy, minkä vuoksi Penrosen laatoitus on jaksoton. Halutessaan lukija voi myös laskea kuvassa näkyvien kokonaisten leijojen ja nuolten lukumäärän suhteen. Onko arvauksia mitä lukua suhde lähestyy, kun laatoitusta jatketaan? Tutkitaan tätä seuraavaksi.

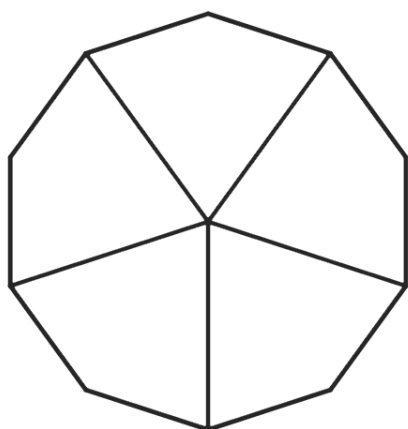
4.3.1 Leijojen ja nuolten deflaatio

Valitaan äärellisen kokoinen Penrosen laatoitus, esimerkiksi ns. aurinko, joka muodostuu viidestä leijalaatasta 4.9. Alkulaatoitukseen ja syntyviin laatoituksiin voidaan soveltaa kappaleessa 4.2 tutuksi tullutta deflaatioprosessia. Penrosen laatat voidaan paloitella niin, että ne muodostavat pienempiä leija- ja nuolilaattoja viereisten laattojen kanssa. Jokainen leijalaatta paloitellaan niin, että se muodostaa kaksi leijaa ja yhden nuolilaatan; nuoli taas muodostaa yhden nuolen ja yhden leijan. Kun kaikki laatat on korvattu pienemmillä laatoilla, syntyvää laatoitusta sanotaan seuraavaksi "sukupolveksi".

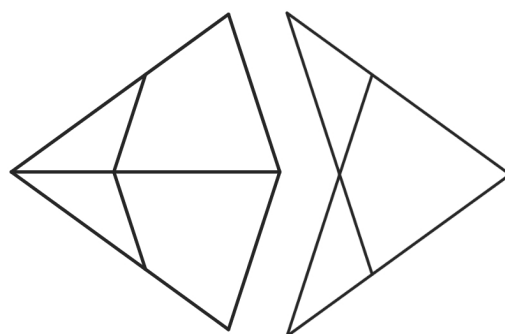
Koska leijojen ja nuolten määrä kasvaa ylläesitetyllä tavalla, voidaan niiden määrät



Kuva 4.8: Penrosen laatoitus leija ja nuoli -laatoilla.



Kuva 4.9: Aurinko-laatoitus koostuu viidestä leijalaa-
tasta.



Kuva 4.10: Leija- ja nuolilaatan de-
flaatio.

seuraavassa sukupolvessa ratkaista matriisiyhtälöstä

$$\begin{pmatrix} L_{n+1} \\ N_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L_n + N_n \\ L_n + N_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_n \\ N_n \end{pmatrix},$$

missä L_n on leijojen ja N_n nuolten määrä n -sukupolvessa. Olkoon nyt leijojen ja nuolten määrät valitussa aloituslaatoituksessa L_0 ja N_0 . Kun deflaatiota toistetaan n kertaa, ovat leijojen ja nuolten määrät siis

$$\begin{pmatrix} L_n \\ N_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} L_0 \\ N_0 \end{pmatrix}.$$

Kerroinmatriisi on itse asiassa luvussa 3.3 esitetty matriisi Q toisessa potenssissa. Käytetään lauseen 3.4 tulosta Q^n -matriisin ekvivalenssista Fibonaccimatriisin kanssa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_n \\ N_n \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} L_0 \\ N_0 \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \right)^n \begin{pmatrix} L_0 \\ N_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} \begin{pmatrix} L_0 \\ N_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ N_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{2n+1}L_0 + F_{2n}N_0 \\ F_{2n}L_0 + F_{2n-1}N_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehdään nyt tärkeä huomio toistuvasta deflaatiosta. Vaikka alkulaatoitus on valitun kokoinen, eikä laatoitusta jatketa ulospäin, niin silti laatoituksen koko suurenee, sillä laatat korvautuvat useammilla laatoilla. Vaihtoehtoisesti voidaan ajatella, että jokaisen deflaation jälkeen skaalataan laattoja suuremmaksi, niin että ne ovat edellisen sukupolven laattojen suuruiset. Tässä tapauksessa laatoituksen pinta-ala myös kasvaa. Selvästi laatoitusta voidaan jatkaa mielivaltaisen pitkälle, joten voimme määritellä laatoituksen leija- ja nuolilaattojen suhteen n -sukupolvessa, kun $n \rightarrow \infty$. Valitsimme aloituslaatoitukseksi auringon, jossa laattojen määrät ovat $L_0 = 5$ ja $N_0 = 0$. Siispä laattojen suhteeksi tulee

$$\frac{L_n}{N_n} = \frac{5F_{2n+1} + 0F_{2n}}{5F_{2n} + 0F_{2n-1}} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \rightarrow \alpha, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

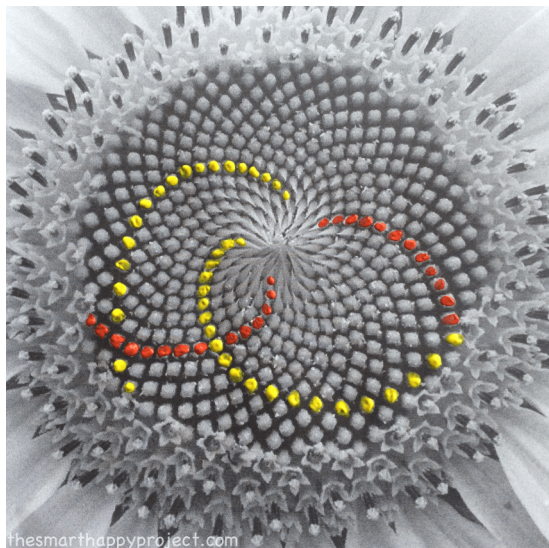
Entä jos aloituslaatoitus on erilainen? Kokeilemalla muita aloituslaatoituksia, voidaan huomata, että laatoitus approksimoi peräkkäisten Fibonaccien jäsenten suhteeseen ja lähestyy siten myös kultaista leikkausta.

Luku 5

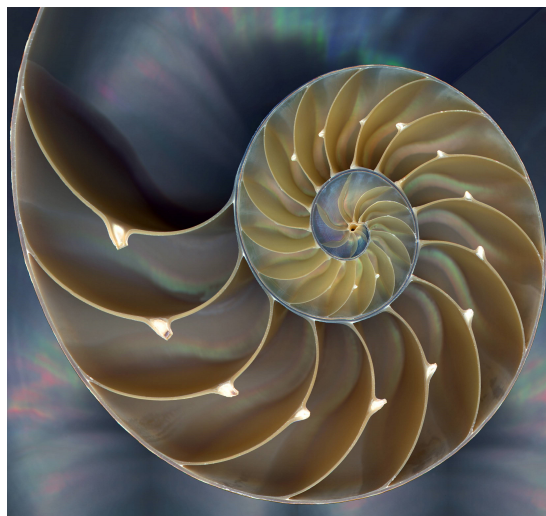
Kultainen leikkaus luonnon optimointistrategiassa

Tähän asti olemme tarkastelleet kultaisen leikkauksen ominaisuuksia ja ilmentymiä eri matematiikan aihepiireissä. Palatakseni tutkielmani johdantoon, kultaisen leikkauksen todettiin olevan harmoninen luku, jota on käytetty paljon taiteessa. Onko luvun käyttäminen sitten ollut intentionaalinen vai alitajuntainen valinta? Varmasti osaan teoksista kultainen leikkaus on sisällytetty tarkoituksenmukaisesti visuaalisen mieltymyksen aikaansaamiseksi, mutta luvun käyttäminen ei rajoitu pelkästään ihmiseen, vaan se esiintyy myös muualla luonnossa. Esimerkiksi auringonkukan mykerössä kukat asettuvat kehille niin, että ne muodostavat spiraaleita mykerön keskeltä reunaa kohden. Spiraalit voivat kulkea myötä- tai vastapäivään, ja on havaittu, että spiraalien määrät kumpaan suuntaan tahansa ovat lähes poikkeuksetta peräkkäisiä Fibonaccin lukuja. Erityisesti siis eri suuntaisten spiraaleiden määrien suhde on likiarvo kultaisesta leikkauksesta. Vastaavia spiraaleja löytyy myös ananaksen kuoren sekä männyn kävyn suomuista.

Kasvien lisäksi Fibonaccin lukujono esiintyy myös eliökunnassa. Helmiveneet ovat nilviäisiä, jotka ovat eläneet paleotsooisella aikakaudella jo 400-500 miljoonaa vuotta sitten, ja niistä periytyneitä lajeja löytyy vielä nykyisin syvältä trooppisista meristä. Helmiveneiden kuoria on käytetty paljon matemaattisten teosten kuvituksissa, sillä kuoren poikkileikkaus on aiemmin esitelty Fibonaccin spiraali, mikä näyttää yllättävältä yhteydeltä matematiikkaan. Tämän selittää se että, kuoren muodostavien "huoneiden" tilavuudet kasvavat rekursiivisesti siten, että huoneen koko on summa kahdesta edellisestä huoneesta; toisinsanoen ne kasvavat Fibonaccin rekursion mukaisesti.



Kuva 5.1: Auringonkukan kaksi erisuuntaista spiraalia on väritetty eri väreillä. [<http://thesmarthappyproject.com/fibonacci-in-a-sunflower/>]



Kuva 5.2: Helmiveneen kuoren poikkileikkauksessa näkyy Fibonaccin spiraali. [<http://livinganddyinginpeace.org/project/how-long-can-a-person-hear/>]

5.1 Janan jako -ongelma

Edellisessä kappaleessa näytimme, että kultainen leikkaus, käsikädessä Fibonaccin lukujonon kanssa, löytyy luonnosta eri yhteyksistä, mm. taiteesta ihmisen kädenjäljestä sekä kasveissa esiintyvistä muodostelmista. Tässä kappaleessa tarjoan ja perustelen erään selityksen ilmiölle. Janan jako -ongelman kautta yleistän ongelman koskemaan myös kasvien optimointistrategiaa, mikä selittää myös Fibonaccin lukujen merkillisen esiintymisen luonnossa.

Niin kasvit kuin eliöt pyrkivät optimoimaan kasvuunsa liittyviä valintoja. Valinnat voivat liittyä siihen, miten saada eniten auringonvaloa lehdilleen taikka siihen, miten saada mahtumaan mahdollisimman paljon kukkia mykeröalustansa. Näille molemmille valinnoille on yhteinen ongelma juuri se, että miten tärkeät osaset tulisi sijoittaa kasvualustalleen, jotta hyöty on mahdollisimman suuri. Ja kuten arvata saattaa, kultainen leikkaus tulee vastaamaan tarpeisiin.

Optimoinnin pohjana on janan jako -ongelma. Olkoon jana $[0, 1)$, ja valitaan jokin rationaaliluku $r \in \mathbb{Q}$. Jos $r \geq 1$ niin otetaan luvusta vain sen desimaaliosa ja valitaan se uudeksi r :ksi. Nyt $r \in [0, 1)$ ja se voidaan merkitä pisteeksi janalle. Seuraavat n pistettä ovat r :n moninkertoja $2r, 3r, \dots, nr$ ja voidaan kuvata aina janalle käyttämällä vain luvun desimaaliosaa. Kokeillaan seuraavaksi miten pisteet sijoittuvat janalle.



Kuva 5.3: Kun irrationaalilukuna käytetään lukua π , jana $[0, 1)$ jakautuu sekä hyvin pieniin että suuriin osiin. Luku ei siis ole hyvä valinta.

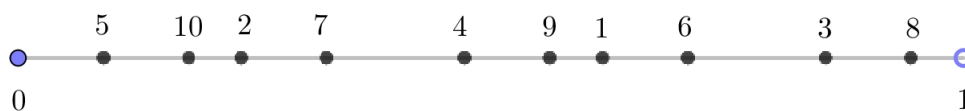
Esimerkki 5.1. Valitaan $r = 0.6$, ja tarkastellaan luvun moninkertojen desimaaliosia: $0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0, 3.6, \dots$. Havaitaan, että desimaaliosat toistuvat kuuden pisteen välein, toisin sanoen pisteet sijoittuvat janalle aina johonkin kohdista $0, 0.2, 0.4, 0.6$ tai 0.8 . Itse asiassa millä tahansa rationaaliluvulla $p/q \in \mathbb{Q}$, pisteitä tulee vähemmän kuin n kappaletta, kun $n > q$. Tämä seuraa siitä, että piste p/q on q -moninkerralla $q \frac{p}{q} = p$, jonka desimaaliosa on 0. Tällöin $q + 1$ -moninkertainen piste on $p + \frac{p}{q}$, jonka desimaaliosa on sama kuin ensimmäisellä pisteellä.

Irrationaaliluvuilla puolestaan pisteet eivät sijoitu päällekkäin, eli niitä kuvautuu janalle aina yhtä paljon kuin kuvattavia pisteitä. Kuvissa 5.3 ja 5.4 on janan jako suoritettu irrationaaliluvuilla π ja α , kun $n = 10$. Havaitaan etteivät pisteet kieltämättä mene päällekkäin, mutta jakauma on erilainen. Mielenkiintomme siirtyy nyt kysymykseen, millä irrationaaliluvulla jakauma on mahdollisimman tasainen? Osoittautuu nimittäin, että juuri kultaisen leikkauksen moninkerrat sijoittuvat kaikista tasaisimmin janalle. Todistusta en tälle tarjoa, mutta lukija voi kokeilla mihin pisteet asettuvat eri irrationaaliluvuilla ja saada näin varmistusta tulokselle. Kaiken kaikkiaan pisteiden sijoittaminen janalle mahdollisimman tasaisesti tuntematta aiempien pisteiden paikkaa on optimaalisinta kultaisen leikkauksen moninkerroilla edellä esitetyllä metodilla. Seuraavassa luvussa esitän, miten menetelmä toteutuu luonnossa.

5.2 Lehtien sijoitus -optimointi

Yhdistetään nyt edellisessä ongelmassa käytetyn janan $[0, 1)$ päät silmukaksi, jolloin voidaan todeta, että ratkaisu tarjoaa vastauksen myös kysymykseen: miten pisteet kannattaa sijoittaa ympyrälle, jotta ne ovat mahdollisimman tasaisesti? Mainittaneen, ettei menetelmä käytä tietoa aiemmista pisteistä; muuten parempia menetelmiä olisi käytettävissä. Tulosta voidaan kuitenkin soveltaa kasvien käyttäytymiseen.

Lehtiasento (engl. *phyllotaxis*) on kasvien menetelmä kasvattaa lehtiä varteensa. Tär-



Kuva 5.4: Jana $[0, 1)$ jakautuu mahdollisimman tasaisiin osiin, kun irrationaaliluvuksi valitaan kultainen leikkaus. Luvut ilmaisevat kuinka mones kultaisen leikkauksen kertaluku kuvautuu kyseiseen kohtaan.

keää lehtien sijoittamisessa on niiden päällekkäisyyksien minimoiminen, jotta lehdet saavat vettä ja auringonvaloa mahdollisimman paljon. Koska kasvi ei tiedä kuinka monta lehteä se tulee kasvattamaan, on lehtien sijoitusten oltava hyvä niiden määrästä riippumatta. Ongelma on itse asiassa sovellutus edellä esitellystä pisteiden sijoitus ympyrälle -ongelmasta; tässä pisteitä ovat lehdet, ja ympyrä on kasvin varsi sen poikkileikkauksesta katsottuna. Optimaaliratkaisu on siis sijoittaa pisteet ympyrälle kultaisen leikkauksen mukaisesti janan jako -ongelmassa esitetyllä tavalla (nyt jana on väännetty ympyräksi). Tämä on itse asiassa menetelmä, jota kasvit käyttävät lehtiensä kasvattamiseen. Paikan tarkkuus ei kuitenkaan ole täsmälleen kultaisen leikkauksen mukainen, vaan yleensä lehdet sijoittuvat peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhteen mukaan. Tyypillisiä ovat esimerkiksi luvun $F_5/F_6 = 5/8$ moninkerrat, jolloin lehdet asettuvat tällä valinnalla kahdeksaan kohtaan, sillä kyseessä on rationaaliluku. Muistetaan kuitenkin lauseesta 3.3, että Fibonaccin peräkkäisten lukujen suhteen raja-arvona on kultainen leikkaus, joten valinta ei ole huono.

Lehtiasentoa vastaavalla tavalla selittyvät myös mm. kävyn tai ananaksen suomuissa taikka auringonkukan mykerössä esiintyvät spiraalit, joiden määrät ovat Fibonaccin lukuja. Spiraalit syntyvät, kun kasvatettava elementit halutaan asettaa kasvualustalle mahdollisimman hyvin, optimoidun kasvun kannalta. Pohjimmiltaan kyse ei ole siis arvoituksellisesta luvusta, jota luonto toteuttaa, vaan menetelmästä, joka takaa tuottavan kasvun – Fibonaccin luvut ja kultainen leikkaus nyt vaan sattuvat liittymään tähän menetelmään.

Luku 6

Lopuksi

Olen käsitellyt kultaista leikkausta monesta lähtökohdasta ja seuraavaksi kerron, mitä opin ja miten etenin tutkielmani työprosessien eri vaiheissa. Lukuprosessia ennen minulla oli suppea kuva kultaista leikkauksesta ja ajattelin leikkauksen liittyvän pääosin geometrisiin konstruktioihin; en edes ajatellut silloin että kyseessä on itse asiassa vain irrationaaliluku. Olin myös lukenut Fibonaccin lukuja noudattavista luonnonilmiöistä, mutta epätieteellisessä kirjallisuudessa perusteluja näille harvoin tarjotaan. Populaarikulttuurissa matematiikka esitetään usein suurena mysteerinä, jota ei pystytä hallitsemaan. Luetuani aiheesta ymmärsin, ettei luvun esiintyneisyys ole sattumaa, vaan järkevä valinta optimointistrategiassa. Lukuprosessin aikana kertyi ymmärrystä kultaista leikkauksesta ja luvusta tuli paljon mielenkiintoisempi.

Kirjoitusprosessin alussa suurin haaste olikin aiheen rajaaminen sopivaksi. Lisäksi Fibonaccin luvut liittyvät läheisesti aiheeseen, joten sitäkään ei voinut sivuuttaa. Kysymys olikin siitä, mitä tuloksia Fibonaccin luvuista aion käsitellä, niin ettei aihe paisuisi liian laajaksi, mutta tarvittavat tulokset, joihin voidaan viitata myöhemmin, löytyvät. Muistiinpanoja tehdessäni minulle myös hahmottui kultaisen leikkauksen esiintyminen matematiikan eri aihepiireissä, ja juuri tämä havainto on tutkielmani "kultainen lanka". Toivotavasti luvun moniulotteisuus tulee tutkielmassani näkyviin ja myös lukijalle muodostuu kattava kuva kultaista leikkauksesta.

Tekstin hiontaprosessissa muokkasin vielä hieman aiheiden käsittelyjärjestystä sekä valmistelin ja hain tutkielmaani kuvia. Näiden piirtäminen helpottui Geogebra-sovelluksella, jolla sain tuotettua laadukkaita kuvia esimerkiksi geometrisista konstruktioista. Lisäksi janan jako -algoritmin toteutus luonnistui vaivattomasti kyseisellä ohjelmalla. Viimeiseksi tarkastin kieliopin, lähdeluettelon sekä tutkielmani kokonaiskuvan. Lopulta pro graduni oli valmis arvioitavaksi.

Kirjallisuuden puolelta kultaista leikkauksesta on paljon verkkomateriaalia, mutta mielestäni R.A. Dunlapin kirja *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers* on kaikista kat-

tavin ja juuri tämän kirjan pohjalta poimin pääosan käsiteltävistä aiheista. Lisäksi R. Grimaldin kirja *Fibonacci and Catalan numbers: An introduction* oli äärimmäisen perusteellinen esitellessä Fibonaccin ja Lucasin lukujen ominaisuuksia. Näitä teoksia suosittelen mikäli käsiteltäviin aiheisiin haluaa perehtyä enemmän. Kannustan myös tutkimaan kultaiseen leikkaukseen liittyviä lukuisia konstruktioita, jotka ilmiömäisesti tuottavat luvun mukaisia mittoja. Toisaalta, voithan myös tapetoida seinän Penrosen tesselaatio-tekstuurilla ja ihmetellä sen epäsäännöllisyyttä. Kultaisesta leikkauksesta on moneksi.

Kirjallisuutta

- [1] Douady, S; Couder, Y (1996). Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process. *Journal of Theoretical Biology*. 178 (3): 255–74. doi:10.1006/jtbi.1996.0026.
- [2] Dunlap, R. A. (1997). *The golden ratio and Fibonacci numbers*. River Edge, NJ: World Scientific.
- [3] Grimaldi, R. P. (2012). *Fibonacci and Catalan numbers: An introduction*. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons.
- [4] Grünbaum, Branko; Shephard, G. C. (1987). *Tilings and Patterns*. New York: W. H. Freeman
- [5] Kepler, Johannes (1966). *A New Year Gift: On Hexagonal Snow*. Oxford University Press, p. 92.
- [6] Livio, Mario (2002). *The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number*. New York: Broadway Books.
- [7] "Alexander Bogomolny, Golden Ratio in Geometry from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles". 22 tammikuuta 2018.
https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml
- [8] "Fibonacci in Nature". 26. tammikuuta 2018.
http://jwilson.coe.uga.edu/emat6680/parveen/fib_nature.htm
- [9] "Golden ratio". 26. tammikuuta 2018.
https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
- [10] "Keskuskadun Penrose". 20. tammikuuta 2018.
<http://simokivela.blogspot.fi/2014/08/keskuskadun-penrose.html>
- [11] "What Is The Golden Ratio? What You Need to Know and How To Use It". 26. tammikuuta 2018.
<https://www.canva.com/learn/what-is-the-golden-ratio/>